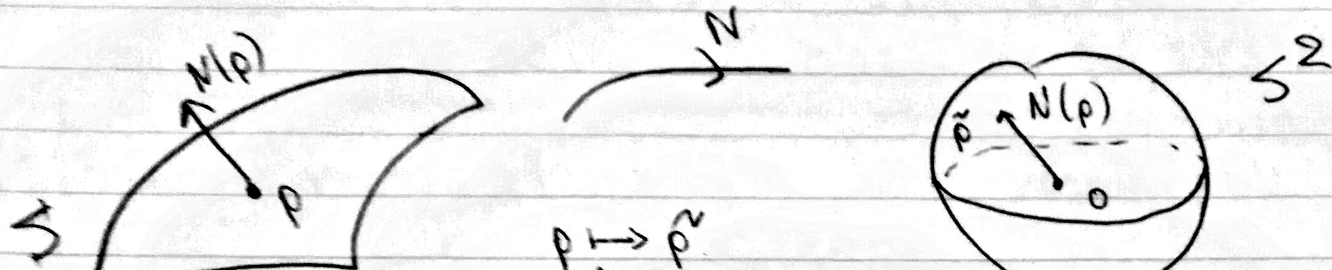
Μάθημα 16ο

04/12/2017

Απεικόνιση Gauss.



$p \mapsto \tilde{p}$

$\vec{O\tilde{p}} = N(p)$

Απεικόνιση Weingarten

$L_p = -dN_p : T_pS \to T_pS$

Αυτοπροσαρτημένος ενδομορφισμός του T_pS

Δεύτερη θεμελιώδης μορφή

$II_p : T_pS \to \mathbb{R}$

$II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle_p \, , \; w \in T_pS$

Θεμελιώδη ποσά 2ας τάξης: $e, f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$e = \langle LX_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle$,

$f = \langle LX_u, X_v \rangle = \langle LX_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle$

$g = \langle LX_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle$

$w = aX_u + bX_v \Rightarrow II(w) = ea^2 + 2fab + gb^2$

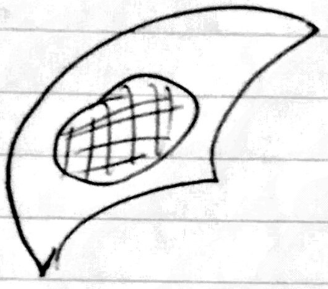
Κάθετη καμπυλότητα

Ορισμός: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια, $p \in S$, $w \in T_pS \setminus \{0\}$. Καλούμε κάθετη καμπυλότητα του S στο σημείο για την εφαπτομένη διεύθυνση w τον αριθμό $k_n(w) = \dfrac{II_p(w)}{I_p(w)}$

$w = a X_u + b X_v \neq (0,0)$

$$k_n(w) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

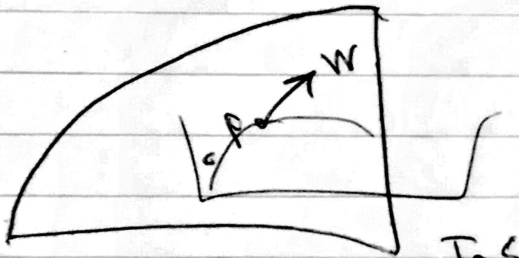
Ειδικά για τις εφαπτόμενες των παρ. καμπυλών έχω:



$X(u, v=v_0)$
$X(u=u_0, v)$

$$\begin{cases} k_n(X_u) = \dfrac{e}{E} \\ k_n(X_v) = \dfrac{g}{G} \end{cases}$$

$\lambda \neq 0$, $k_n(\lambda w) = \dfrac{II_p(\lambda w)}{I_p(\lambda w)} = \dfrac{\lambda^2 II_p(w)}{\lambda^2 I_p(w)} \Rightarrow \boxed{k_n(\lambda w) = k_n(w)}$



T_pS

$w \in T_pS$, $\|w\|$
Γεωμετρική ερμηνεία της $k_n(w)$
Θεωρώ καμπύλη: $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$
με παράμετρο το μήκος τόξου ώστε
$c(0) = p$, $\dot{c}(0) = w$

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)} = \frac{\langle L_p w, w \rangle_p}{\langle w, w \rangle_p} = -\langle dN_p(w), w \rangle =$$

$$= -\langle (N \circ c)'(0), \dot{c}(0) \rangle$$

$0 = (\langle N \circ c(s), \dot{c}(s) \rangle)^{\cdot} = \langle (N \circ c)^{\cdot}(s), \dot{c}(s) \rangle + \langle N \circ c(s), \ddot{c}(s) \rangle$

<u>$s=0$</u>: $-\langle (N \circ c)^{\cdot}(0), \dot{c}(0) \rangle = \langle N \circ c(0), \ddot{c}(0) \rangle$

$k_n(w) = \langle N(p), \ddot{c}(0) \rangle$

Εδώ η καμπύλη c έχει καμπυλότητα $\underline{k>0}$

$\ddot{c}(0) = \dot{\vec{t}}(0) = k(0)\cdot \vec{n}(0)$

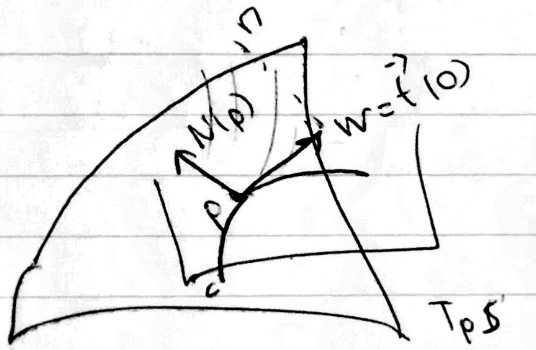
$k_n(w) = k(0)\cdot \langle N(p), \vec{n}(0) \rangle$

$$\boxed{k_n(w) = k(0)\cdot \cos\theta \quad , \quad \theta = \sphericalangle (N(p), \vec{n}(0))}$$

Επιλέγω ως καμπύλη c την τομή της S με το επίπεδο Π που διέρχεται από το σημείο p και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα w, N(p)

Τότε $\vec{n}(0) = \pm N(p)$.

Συμπέρασμα : $k_n(w) = \pm k(0)$



<u>Κύριες καμπυλότητες</u>

<u>Ορισμός</u>: Έστω $p \in S$. Οι αριθμοί $k_1(p) = \max\{k_n(w) / w \in T_pS, \|w\|=1\}$

$k_2(p) = \min\{k_n(w) / w \in T_pS, \|w\|=1\}$

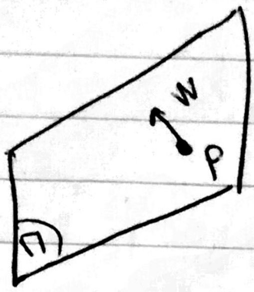
ονομάζονται κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας ως προς σημείο p

<u>Παρατήρηση 1</u>: Ισχύει $k_1(p) \geq k_2(p)$

<u>Παρατήρηση 2</u>: $w = aX_u + bX_v \quad \|w\|=1$

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)} = ea^2 + 2fab + gb^2$$

① Επίπεδα

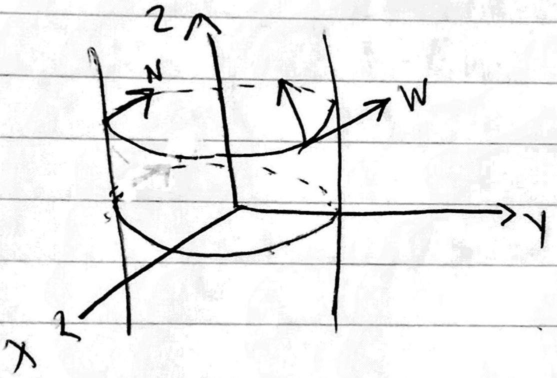


$L_p = 0$, $II_p = 0$

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)} = 0 \quad \forall w \in T_p\Pi$$

$$\Rightarrow k_1(p) = 0 = k_2(p)$$

② Κύλινδρος



$C_r : x^2 + y^2 = r^2$

$p = (x,y,z) \in C_r$

$w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p C_r$

$$II_p(w) = \frac{1}{r}(w_1^2 + w_2^2) =$$

$$= \frac{1}{r}\{\|w\|^2 - w_3^2\}$$

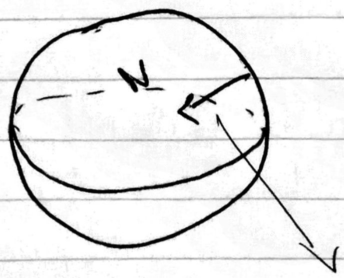
$$T_p C_r = \{ w = (w_1, w_2, w_3) \,/\, x w_1 + y w_2 = 0 \}$$

$$k_1(p) = \max\{ k_n(w) \,/\, w \in T_p C_r , \|w\| \} =$$

$$= \max\{ \frac{1}{r}(1 - w_3^2) \,/\, -1 \le w_3 \le 1 \} = \frac{1}{r}$$

$$k_2(p) = \min\{ \dots \} = \min\{ \frac{1}{r}(1-w_3^2) / -1 \le w_3 \le 1 \} = 0$$

③ Σφαίρα S^2_R



$II_p = \frac{1}{R} I_p$, $k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)} = \frac{1}{R}$

$\Rightarrow k_1(p) = \frac{1}{R} = k_2(p)$ σταθερή συνάρτηση

άρα max = min.

εσωτερικό κάθετο.

Οι κυριες καμπυλότητες μιας επιφανειας S είναι οι συναρτήσεις $k_1 : S \to \mathbb{R}$, $p \mapsto k_1(p)$
$k_2 : S \to \mathbb{R}$, $p \mapsto k_2(p)$

Θεώρημα
Εστω $A : V \to V$ αυτοπροσαρτημένος γραμμ. μετασχημ. οπου V είναι 2-διαστατος διανυσματικος χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο.
Τότε υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1, e_2\}$ του V ώστε $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$

$$\left(\begin{array}{l} \lambda_1 = \max \{ \langle Aw, w \rangle \ / \ \|w\| = 1 \}. \\ \lambda_2 = \max \{ \langle Aw, w \rangle \ / \ \|w\| = 1 \}. \end{array} \right)$$

$\|w\| = 1$, $k_n(w) = \mathrm{II}_p(w) = \langle L_p w, w \rangle_p$

Θεώρημα
Οι κυριες καμπυλότητες $k_1(p) \geq k_2(p)$ μιας επιφάνειας S στο τυχαίο σημείο της p είναι ακριβώς οι ιδιότητες της απεικόνισης Weingarten.
Επιπλέον υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1(p), e_2(p)\}$ του T_pS ώστε $L_p(e_1(p)) = k_1(p)\, e_1(p)$
$L_p(e_2(p)) = k_2(p)\, e_2(p)$

$\boxed{\text{Ορολογία}}$ Τα διανύσματα $e_1(p)$, $e_2(p)$ καλούνται κύριας διεύθυνσης.

$L_p : T_pS \to T_pS$
Οι αναλλοίωτες του γραμμ. ενδομορφισμού $L_p : L_pS \to L_pS$ είναι η $\det L_pS$ και το traceL_p

$$\begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}$$

$$\det L_p = \det \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix} = k_1(p) \cdot k_2(p).$$

$$\operatorname{trace} L_p = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix} = k_1(p) + k_2(p)$$

Καμπυλότητα Gauss και μέση καμπυλότητα

<u>Ορισμός</u> Έστω S κανονική επιφάνεια
η καμπυλότητα Gauss είναι η συνάρτηση
$K : S \to \mathbb{R}$, $K(p) = \det L_p = k_1(p) k_2(p)$
Η μέση καμπυλότητα είναι η συνάρτηση $H : S \to \mathbb{R}$.
$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{trace} L_p = \frac{1}{2} (k_1(p) + k_2(p))$

$$\chi_{L_p}(t) = \begin{vmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) - t \end{vmatrix} = t^2 - (k_1(p) + k_2(p)) t + k_1(p) k_2(p) \Rightarrow$$

$$\boxed{\chi_{L_p}(t) = t^2 - 2H(p) t + K(p)}$$

Οι ρίζες του είναι: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{H^2(p) \geq K(p)}$

$$\frac{2H(p) \pm \sqrt{4H^2(p) - 4K(p)}}{2} = H(p) \pm \sqrt{H^2(p) - K(p)}$$

$k_1(p) = H(p) + \sqrt{H^2(p) - K(p)}$
$k_2(p) = H(p) - \sqrt{H^2(p) - K(p)}$

$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$

$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$

Υπολογισμός της καμπυλότητας Gauss και της μέσης καμπυλότητας.

Πρόταση: Έστω $X : U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u,v) \in U$ μιας κανονικής επιφάνειας S. Ισχύουν τα εξής:

$$K \circ X = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H \circ X = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}$$